Oral HEC 2021 E

Énoncé

On considère n (n étant un entier naturel supérieur ou égal à 2) paires d'images deux à deux distinctes. Sur une seule des n paires sont représentées des étoiles. Ces images sont réparties en deux tas : chaque paire aura une de ses images dans chaque tas. Les images sont posées face cachée. A chaque étape, une carte de chaque tas est retournée. Si les deux cartes retournées forment la paire d'étoiles, alors le jeu s'arrête, sinon les cartes sont retournées et les tas à nouveau mélangés.
Deux joueurs A et B jouent en parallèle. Ils possèdent chacun leur propre jeu d'images, avec chacun les deux tas, mais réalisent leurs étapes en même temps. Soit X (respectivement Y) le nombre d'étapes de jeu effectuées par le joueur A (respectivement B) lorsqu'il trouve la paire d'étoiles. Soit $M = \max(X;Y)$. On admet que M est une variable aléatoire.

1. Question de cours. Espérance d'une variable aléatoire discrète.
2. Écrire une fonction **Python** simulant l'expérience et renvoyant une réalisation de M.
3. Donner la loi de X, son espérance et sa variance.
4. Pour tout entier naturel k, déterminer $\mathbb{P}\left([M \leqslant k]\right)$.
5. Montrer que la série $\sum_{k\geqslant 0} \mathbb{P}\left([M > k]\right)$ converge.
6. Soit Z une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que $\sum_{k\geqslant 0} \mathbb{P}\left([Z > k]\right)$ converge.
   - 6.a. Montrer que pour tout entier naturel K non nul, on a : $\sum_{k=1}^{K} k\mathbb{P}\left([Z = k]\right) = -K\mathbb{P}(Z > K]) + \sum_{k=0}^{K-1} \mathbb{P}\left([Z > k]\right)$.
   - 6.b. Montrer que Z possède une espérance.
   - 6.c. Démontrer que $\lim_{K\to+\infty} K\mathbb{P}(Z > K]) = 0$.
7. Déduire des questions précédentes que M admet une espérance et la calculer.

Corrigé

♥ L'avis du chef ! ♥
Exercice très classique sur cette autre expression de l'espérance... Le fait qu'il soit aussi classique le rend presque trop simple pour un oral. À retravailler autant que nécessaire !

On considère n (n étant un entier naturel supérieur ou égal à 2) paires d'images deux à deux distinctes. Sur une seule des n paires sont représentées des étoiles. Ces images sont réparties en deux tas : chaque paire aura une de ses images dans chaque tas. Les images sont posées face cachée. A chaque étape, une carte de chaque tas est retournée. Si les deux cartes retournées forment la paire d'étoiles, alors le jeu s'arrête, sinon les cartes sont retournées et les tas à nouveau mélangés.
Deux joueurs A et B jouent en parallèle. Ils possèdent chacun leur propre jeu d'images, avec chacun les deux tas, mais réalisent leurs étapes en même temps. Soit X (respectivement Y) le nombre d'étapes de jeu effectuées par le joueur A (respectivement B) lorsqu'il trouve la paire d'étoiles. Soit $M = \max(X; Y)$. On admet que M est une variable aléatoire.

1. Question de cours. Espérance d'une variable aléatoire discrète.
   QUESTION DE COURS 49.

2. Écrire une fonction `Python` simulant l'expérience et renvoyant une réalisation de M.

```
def simulX(n):
    X=1
    while rd.random()>1/n or rd.random()>1/n:
        X=X+1
    return X

def simulM(n):
    return max(simulX(n),simulX(n))
```

3. Donner la loi de X, son espérance et sa variance.
   ✓ L'expérience consiste en des répétitions indépendantes (on remet la carte après chaque tirage) de la même épreuve de Bernoulli dont le succès "les deux tas fournissent la carte étoile" se produit avec une probabilité $\frac{1}{n^2}$ (par équiprobabilité du tirage de la carte étoile dans un tas, et indépendance des deux tirages effectués dans chacun des tas).
   ✓ La variable aléatoire X donne alors le rang du premier succès.

   Conclusion : X suit la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{n^2}$, ainsi $\mathbb{E}(X) = n^2$ et $\mathbb{V}(X) = n^2(n^2-1)$.

4. Pour tout entier naturel k, déterminer $\mathbb{P}([M \leqslant k])$.
   Soit $k \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([M \leqslant k]) &= \mathbb{P}([X \leqslant k] \cap [Y \leqslant k]) \\ &= \mathbb{P}([X \leqslant k])\mathbb{P}([Y \leqslant k]) \\ &= \mathbb{P}([X \leqslant k])^2\end{aligned}$$

(indépendance de X et Y ; X et Y ont même loi)

   Ensuite :
   - si $k = 0$, puisque $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$, on a $\mathbb{P}([X \leqslant 0]) = 0$, d'où : $\mathbb{P}([M \leqslant 0]) = 0$.
   - si $k \geqslant 1$:
     Puisque $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([X \leqslant k]) &= \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}([X = i]) \\ &= \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{n^2}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{i-1} \\ &= \frac{1}{n^2}\sum_{j=0}^{k-1}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{j} \\ &= \frac{1}{n^2}\frac{1-\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^k}{1-\left(1-\frac{1}{n^2}\right)} \\ &= 1-\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^k\end{aligned}$$

(j=i-1 ; $n \geqslant 2$ donc $\frac{1}{n^2} \neq 1$)

   On remarque que les deux cas se regroupent...

   Conclusion : pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}([M \leqslant k]) = \left(1-\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^k\right)^2$.

Remarques
- On détaille parfois ce passage en écrivant plutôt : Puisque $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$, on a $[X \leqslant k] = \bigcup_{i=1}^{k}[X = i]$. Puis, par incompatibilité des évènements de la famille $([X = i])_{i\in[\![1;k]\!]}$, on a...
- On peut aussi retenir que si $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}([X > n]) = (1-p)^n$...

5. Montrer que la série $\sum_{k\geqslant 0}\mathbb{P}\big([M>k]\big)$ converge.

- Soit $k\in\mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big([M>k]\big)&=1-\mathbb{P}\big([M\leqslant k]\big)\\&=1-\left(1-\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^k\right)^2\\&=2\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^k-\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{2k}\\&=2\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^k-\left(\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^2\right)^k\end{aligned}$$

↙ question précédente

- Or, $\frac{1}{n^2}\in]0;1[$, donc $\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\in]0;1[$ et $\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^2\in]0;1[$. Par conséquent, les séries $\sum_{k\geqslant 0}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^k$ et $\sum_{k\geqslant 0}\left(\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^2\right)^k$ sont des séries géométriques convergentes.

Conclusion : la série $\sum_{k\geqslant 0}\mathbb{P}\big([M>k]\big)$ converge (combinaison linéaire de séries convergentes).

6. Soit Z une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que $\sum_{k\geqslant 0}\mathbb{P}\big([Z>k]\big)$ converge.

Quelle joie !
QUESTION CLASSIQUE 15 en avant !

6.a. Montrer que pour tout entier naturel K non nul, on a : $\sum_{k=1}^{K}k\mathbb{P}\big([Z=k]\big)=-K\mathbb{P}(Z>K])+\sum_{k=0}^{K-1}\mathbb{P}\big([Z>k]\big)$.

- Soit $k\in\mathbb{N}^*$. On a :

$$[Z\geqslant k]=[Z=k]\cup[Z>k]$$

Mais Z est à valeurs entières et $k\in\mathbb{N}^*$, donc $[Z\geqslant k]=[Z>k-1]$. Ainsi :

$$[Z>k-1]=[Z=k]\cup[Z>k]$$

Puis, par incompatibilité des évènements $[Z=k]$ et $[Z>k]$, on a :

$$\mathbb{P}\big([Z=k]\big)=\mathbb{P}\big([Z>k-1]\big)-\mathbb{P}\big([Z>k]\big)$$

- Soit $K\in\mathbb{N}^*$. On obtient ainsi en sommant la relation précédente pour $k\in[\![1;K]\!]$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{K}k\mathbb{P}\big([Z=k]\big)&=\sum_{k=1}^{K}k\left(\mathbb{P}\big([Z>k-1]\big)-\mathbb{P}\big([Z>k]\big)\right)\\&=\sum_{k=1}^{K}k\mathbb{P}\big([Z>k-1]\big)-\sum_{k=1}^{K}k\mathbb{P}\big([Z>k]\big)\\&=\sum_{k=1}^{K}(k-1)\mathbb{P}\big([Z>k-1]\big)+\sum_{k=1}^{K}\mathbb{P}\big([Z>k-1]\big)-\sum_{k=1}^{K}k\mathbb{P}\big([Z>k]\big)\\&=0\mathbb{P}\big([Z>0]\big)-K\mathbb{P}\big([Z>k]\big)+\sum_{i=0}^{K-1}\mathbb{P}\big([Z>i]\big)\end{aligned}$$

↙ linéarité de la somme

↙ télescopage de la première et dernière somme, $i=k-1$ dans la seconde

Conclusion : pour tout $K\in\mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{K}k\mathbb{P}\big([Z=k]\big)=-K\mathbb{P}(Z>K])+\sum_{k=0}^{K-1}\mathbb{P}\big([Z>k]\big)$.

6.b. Montrer que Z possède une espérance.

- On sait que $Z(\Omega)\subset\mathbb{N}^*$. Ainsi :
Z admet une espérance si, et seulement si, la série $\sum_{k\geqslant 1}k\mathbb{P}\big([Z=k]\big)$ est absolument convergente
si, et seulement si, la série $\sum_{k\geqslant 1}k\mathbb{P}\big([Z=k]\big)$ est convergente,
car $\forall k\in\mathbb{N}^*,\ k\mathbb{P}\big([Z=k]\big)\geqslant 0$

Pourquoi ?
La série est à terme général positif...

- On sait que la suite des sommes partielles de la série $\sum_{k\geqslant 1}k\mathbb{P}\big([Z=k]\big)$ est croissante.
Montrons que cette suite des sommes partielles est majorée.

* On a, pour tout $K \in \mathbb{N}^*$, $K\mathbb{P}([Z > K]) \geqslant 0$. Donc, d'après la question précédente :

$$\forall K \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{K} k\mathbb{P}([Z=k]) \leqslant \sum_{k=0}^{K-1} \mathbb{P}([Z>k])$$

* Or, par hypothèse, la série $\sum_{k\geqslant 0} \mathbb{P}([Z>k])$ est convergente et à terme général positif ; donc sa suite des sommes partielles est croissante et convergente : elle est donc majorée par sa limite… Autrement dit :

$$\forall K \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=0}^{K-1} \mathbb{P}([Z>k]) \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([Z>k])$$

Par transitivité :

$$\forall K \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{K} k\mathbb{P}([Z=k]) \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([Z>k])$$

La suite des sommes partielles de la série $\sum_{k\geqslant 1} k\mathbb{P}([Z=k])$ est donc

✓ croissante (immédiat),

✓ majorée, par $\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([Z>k])$.

Ainsi, d'après le théorème de convergence monotone, cette suite converge.
Autrement dit, la série $\sum_{k\geqslant 1} k\mathbb{P}([Z=k])$ est convergente.

Conclusion : Z admet une espérance.

6.c. Démontrer que $\lim_{K\to+\infty} K\mathbb{P}(Z>K]) = 0$.
Soit $K \in \mathbb{N}^*$. Puisque $Z(\Omega) = \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} K\mathbb{P}([Z>K]) &= K\sum_{k=K+1}^{+\infty} \mathbb{P}([Z=k]) && \text{linéarté de la somme} \\ &= \sum_{k=K+1}^{+\infty} K\mathbb{P}([Z=k]) \\ &\leqslant \sum_{k=K+1}^{+\infty} k\mathbb{P}([Z=k]) && \forall k \geqslant K+1,\ K\mathbb{P}([Z=k]) \leqslant k\mathbb{P}([Z=k]) \text{ et la série } \sum_{k\geqslant K+1} k\mathbb{P}([Z=k]) \text{ converge car } Z \text{ a une espérance} \end{aligned}$$

On a ainsi :

✓ $\forall K \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant K\mathbb{P}([Z>K]) \leqslant \mathbb{E}(Z) - \sum_{k=1}^{K} k\mathbb{P}([Z=k])$

✓ $\lim_{K\to+\infty} \sum_{k=1}^{K} k\mathbb{P}([Z=k]) = \mathbb{E}(Z)$…

Conclusion : par théorème d'encadrement, on conclut que $\lim_{K\to+\infty} K\mathbb{P}(Z>K]) = 0$.

✓ Rigueur !
L'argument d'existence de $\mathbb{E}(X)$ est nécessaire pour écrire $\sum_{k=n+1}^{+\infty} k\mathbb{P}([X=k])$. La série en jeu est convergente car il s'agit d'une troncature de la série $\sum_{k\geqslant 0} k\mathbb{P}([X=k])$ qui converge car X admet une espérance.

Pourquoi ?
On pourrait directement écrire que $\lim_{K\to+\infty} \sum_{k=K+1}^{+\infty} k\mathbb{P}([Z=k]) = 0$, comme reste d'une série convergente (notion HP, mais que l'on rencontre souvent). Sinon, on détaille en une ligne comme on l'a fait ici.

7. Déduire des questions précédentes que M admet une espérance et la calculer.
D'après la question **5.**, M satisfait à l'hypothèse de la question **6.**. Ainsi, d'après la question **6.b.**, M admet une espérance. Puis, en passant à la limite quand $K \to +\infty$ dans l'expression de la question **6.a.**, en utilisant le résultat de la question **6.c.**, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(M) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([Z>k]) && \text{question 4. et début de 5.} \\ &= 2\sum_{k=0}^{+\infty} \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^k - \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^2\right)^k \\ &= \frac{2}{\frac{1}{n^2}} - \frac{1}{\frac{2}{n^2}-\frac{1}{n^4}} \\ &= 2n^2 - \frac{n^4}{2n^2-1} \\ &= n^2\frac{2(2n^2-1)-n^2}{2n^2-1} \\ &= n^2\frac{3n^2-2}{2n^2-1} \end{aligned}$$